《金融经济学二十五讲》配套课件

第15讲 无套利定价理论基础

徐高 博士

2019年4月13日

令人费解的风险中性定价

- 为什么可以假设投资者是风险中性的？
- 风险中性概率是什么？
- 风险中性世界与真实世界有什么关系？
- 资产价格在风险中性世界里满足什么样的规律？

- 为什么风险中性定价这么一种不直观、反直觉的定价方法是正确的？

15.1 套利的严格定义
资产市场数学描述回顾

◆ 资产市场的（1期）支付矩阵与（0期）价格向量

$$
\mathbf{x} \square
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & J \end{array} & \\
\begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_S^1 & \cdots & x_S^J \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ S \end{array}
\end{array}
\qquad
\mathbf{p} \square \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_J \end{bmatrix}
$$

◆ 资产组合、资产组合的（1期）支付、资产组合的（0期）价格

$$
\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_J \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{x}\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{J} x_1^j \theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} x_S^j \theta_j \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{p}\boldsymbol{\theta} = \sum_{j=1}^{J} p_j \theta_j
$$

15.1 套利的严格定义

套利的定义及分类

- **定义15.1**（套利）：同时满足下列3个条件的资产组合**θ**叫做套利（arbitrage）：（i）**pθ**≤*0*；（ii）**xθ≥0**；（iii）前两个不等式中至少有一个是严格不等式。

- 三类套利
  - 第一类套利，**pθ**<0且**xθ=0**：在当前获得确定性的收益，而在未来却不承担任何责任。
  - 第二类套利，**pθ**=0且**xθ**>**0**：在当前不付出任何代价，而在未来却能获得正的收益（尽管这种收益是不确定的，但这种不确定性只是获利有多大而已，而不会带来任何损失的可能）
  - 第三类套利，**pθ**<0且**xθ**>**0**：当前既能获得确定性的正收益，在未来还能获得正的支付

- 三点说明
  - 套利只依赖于资产的支付和价格，而与各个状态发生的概率无关。
  - 任何套利机会都可以化成前面这三种套利的一种
  - 无套利是均衡的一个必要条件——均衡中一定没有套利机会；但无套利并非均衡的充分条件——即使资产市场中没有套利机会，也未必达到了均衡（市场可能还没出清）

15.2 资产定价基本定理
状态价格向量与资产定价资本定理

- **定义15.2**（状态价格向量）：状态价格向量$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, ..., \varphi_S)^T$为一组正数（$\varphi_s>0$，$\forall s$），使得对于任意资产$j$都有下式成立

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$$

- 对状态价格向量的说明
  - 状态价格就是各个状态对应的Arrow证券的价格
  - 状态价格等于随机折现因子（定价核）乘以真实世界的概率$\varphi_s=\pi_s m_s$

$$p_j = E[\tilde{m}\tilde{x}^j] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s m_s x_s^j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$$

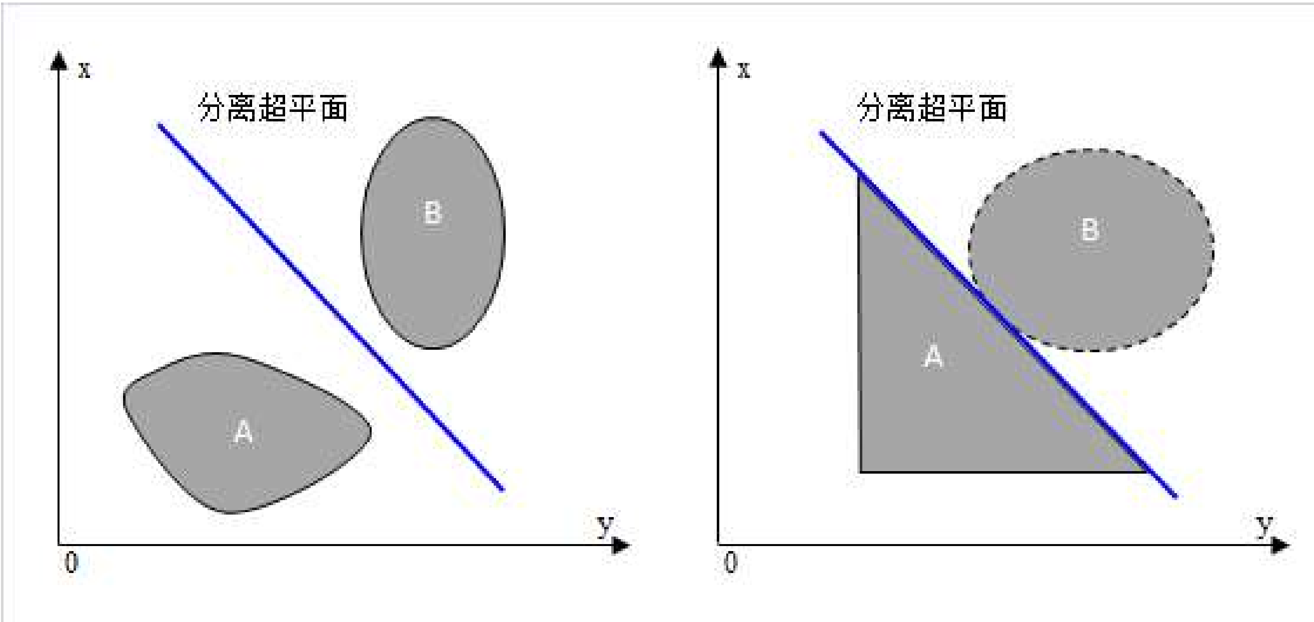
  - 状态价格总是正的（Arrow证券的价格必然大于0）

- **定理15.3**（资产定价基本定理）：资产市场中不存在套利机会，当且仅当状态价格向量存在

15.2 资产定价基本定理

超平面分离定理

- 超平面分离定理：任给两个S维空间中相互分离的凸集合A和B（二者的交集为空集），在这两个凸集合中分别任取一点，$\forall a\in A$，$b\in B$，一定可以找到一个线性函数$F(x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_Sx_S$（其中的$\alpha_1$、$\alpha_2$、…… α_S都是常数），使得$F(a)<F(b)$
  - 由于F是线性函数，所以对任意实数μ，必有$F(\mu a)=\mu F(a)$



15.2 资产定价基本定理

资产定价基本定理的证明思路

- 定义集合A

$$A \equiv \left\{ \left(-\sum_{j=1}^{J} p_j\theta_j, \sum_{j=1}^{J} x_1^j\theta_j, \cdots, \sum_{j=1}^{J} x_S^j\theta_j \right) : \theta_j \in R,\quad \forall j = 1, \cdots, J \right\}$$

  - A中的元素都是包含$S+1$个元素的向量，每个向量对应一个资产组合
  - 每个向量的第1个元素是资产组合0期价值乘以-1，后S个元素是资产组合在1期各个状态的支付
  - 集合A中的元素的自由度只有S个——因为根据已知的支付矩阵$\mathbf{x}$与价格向量$\mathbf{p}$，给出了A中元素的S个分量后，第$S+1$个分量就能算出来——所以集合A构成了一个维数低于$S+1$的子空间（subspace）

- 定义集合B

$$B \equiv \left\{ \left(b_0, b_1, \cdots, b_S \right) : b_i \geq 0, \forall i = 0, 1, \cdots, S \right\}$$

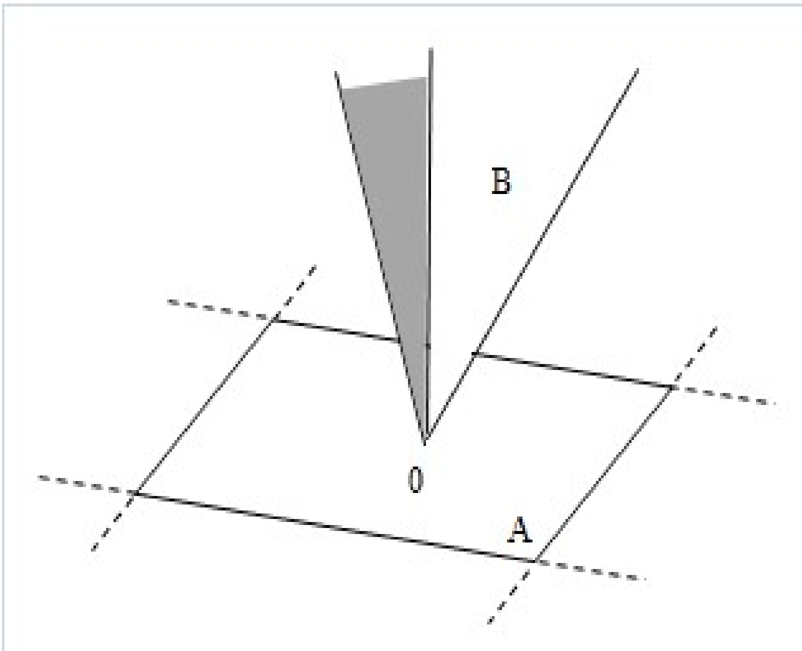
  - B中的元素都是包含$S+1$个元素的向量，且向量的每个元素都非负
  - 集合B是一个锥（cone）——在二维的情况下，集合B就是二维坐标系的第一象限（包含坐标轴）

《金融经济学二十五讲》配套课件

15.2 资产定价基本定理
资产定价基本定理的证明思路（续1）

- 资产市场中如果没有套利机会，集合A和集合B只相交于**0**=(0, 0, ..., 0)这一点（ $A\cap B=\{\mathbf{0}\}$ ）
  - 如果A和B还相交于非0的点，就意味着下面这个向量的所有元素都非负，且至少有一个元素严格为正，因而构成了前面定义的套利

$$\left(-\sum_{j=1}^{J} p_j\theta_j, \sum_{j=1}^{J} x_1^j\theta_j, \cdots, \sum_{j=1}^{J} x_S^j\theta_j\right)$$



15.2 资产定价基本定理

资产定价基本定理的证明思路（续2）

- 集合A与集合B-{**0**}（集合B除去**0**点）都是凸集，由超平面分离定理可以知道，可以找到一个线性的函数$F(x)=\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_S x_S$，使得$F(a)<F(b)$，$\forall a \in A$，$b \in B$-{**0**}
- 对任意元素$a \in A$，任给一个实数μ，必有$\mu a \in A$——如果一个投资组合在A中，那么把投资组合各项权重全部乘以μ得到的新投资组合也必然在A中
- 对任意$a \in A$，必然有$F(a)=0$
  - 反证法，假设这一结论不成立，则必然存在某个$a_0 \in A$，使得$F(a_0)\neq 0$
  - 当$\mu \to \infty$时（如果$F(a_0)<0$，则让$\mu \to -\infty$），必有$F(\mu a_0)= \mu F(a_0) \to \infty$
  - $F(a)<F(b)$（$\forall a \in A$，$b \in B$-{**0**}）将无法成立，形成矛盾
- 由于$F(a)<F(b)$，又由于对任意的$b \in B$-{0}，必有$F(b)>0$，因此对线性函数$F(x)=\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_S x_S$来说，必有$\alpha_i>0$（$i$=0,1,...,$S$）
- $F(a)=0$写成

$$-\alpha_0 \sum_{j=1}^{J} p_j \theta_j + \alpha_1 \sum_{j=1}^{J} x_1^j \theta_j + \cdots + \alpha_S \sum_{j=1}^{J} x_S^j \theta_j = 0$$

资产定价基本定理的证明思路（续3）

- 由于权重θ可以任意选择，完全可以将其设定为某种资产j的权重为1，其它资产的权重全部为0，所以对任意一种资产j，都有

$$-\alpha_0 p_j + \alpha_1 x_1^j + \cdots + \alpha_S x_S^j = 0$$

变形为
$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \frac{\alpha_s}{\alpha_0} x_s^j$$

其中的α_s/α_0（s=1,...,S）全是正数，就是所要寻找的状态价格，定理的充分性（无套利=>存在状态价格向量）得证

- 如果已经存在着状态价格φ_1，...，φ_S，则资产价格必定可以表示为

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$$

由于所有的φ_s都是正数，所以如果$\mathbf{x\theta} \geq \mathbf{0}$，必然有$\mathbf{p\theta} \geq 0$。而如果$\mathbf{x\theta} > \mathbf{0}$，则必有$\mathbf{p\theta} > 0$。所以不存在套利机会，定理的必要性得证

15.2 资产定价基本定理
完备市场中状态价格的唯一性

- 定理**15.4**（第二资产定价基本定理）：在一个完备的资产市场中如果不存在套利机会，则存在唯一的状态价格向量
- 证明：
  - 完备市场中，必然可以用市场中现有资产构造出各个状态的Arrow证券
  - 如果状态价格不唯一，必然会导致至少一个状态对应两个状态价格，因而必然至少有一个Arrow证券有两个价格
  - 因而必然会出现套利机会，与无套利的假设矛盾
  - 所以在完备市场中，状态价格向量必定唯一

15.3 风险中性概率

风险中性概率的推导

- 无风险资产在现在（0期）的价格应该为无风险利率的倒数，即e^{-r}（连续复利计息），它应该等于所有状态价格之和

$$e^{-r}=\sum_{s=1}^{S}\varphi_s$$

- 定义

$$q_s \triangleq \frac{\varphi_s}{\sum_{s=1}^{S}\varphi_s}=e^{r}\varphi_s$$

- 因为$\sum_s q_s=1$，故可以将q_1、…、q_S视为各个状态发生的概率（注意这个概率与真实世界中各个状态发生的概率是两回事），有

$$p=\sum_{s=1}^{S}\varphi_s x_s=e^{-r}\sum_{s=1}^{S}e^{r}\varphi_s x_s=e^{-r}\sum_{s=1}^{S}q_s x_s=e^{-r}E^{Q}[\tilde{x}]$$

  其中期望符号的上标Q是用来区分用真实世界概率π_1、…、π_S计算的数学期望$E[\tilde{x}]$

- 构造的概率（q_1、…、q_S）叫做风险中性概率；这个概率所对应的假象世界叫做风险中性世界；风险中性世界中的资产定价问题变成了求取数学期望的简单问题

15.3 风险中性概率
风险中性定价方法和风险中性概率的经济含义

- 无套利定价（风险中性定价）方法
  - 验证资产市场不存在套利机会，且是完备的，从而确认存在唯一状态价格向量；
  - 利用现有的资产价格信息，直接求出风险中性概率；
  - 利用$p=e^{-r}E^{Q}[\tilde{x}]$计算资产价格
- 均衡市场（C-CAPM）的风险中性概率

$$p = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}\tilde{x}\right] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \delta \frac{u'(c_{1,s})}{u'(c_0)} x_s$$

$$q_s = \delta\pi_s \frac{u'(c_{1,s})}{u'(c_0)} \bigg/ \sum_{s'=1}^{S} \delta\pi_{s'} \frac{u'(c_{1,s'})}{u'(c_0)} = \pi_s u'(c_{1,s}) \bigg/ \sum_{s'=1}^{S} \pi_{s'} u'(c_{1,s'})$$

- 风险中性概率（q_s）其实是对真实世界概率（π_s）的调整——在风险中性概率中，那些消费更为宝贵（消费边际效用更高）的状态已经在计算概率时获得了增大

几个概念及其相互联系

$$p = E[\tilde{m}\tilde{x}] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s m_s x_s = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s = e^{-r} \sum_{s=1}^{S} q_s x_s = e^{-r} E^Q[\tilde{x}]$$

- $\tilde{m}$（ $m_s=\varphi_s/\pi_s$ ）：随机折现因子（stochastic discount factor，SDF），状态价格密度（state price density），状态价格核（state price kernel），定价核（pricing kernel）
- $\varphi_s=\pi_s m_s$：状态价格（state price），**Arrow**证券价格
- $e^r=\sum_s\varphi_s=\sum_s \pi_s m_s=E[\tilde{m}]$：无风险资产价格
- $q_s=e^r\varphi_s$：风险中性概率（risk neutral probability）

风险中性定价的直觉

- 关键问题：资产定价的核心明明是对风险的处理，为什么可以假设投资者都是风险中性的来定价？

- 汉堡和可乐套餐的定价问题
  - 一个汉堡值多少钱，一杯可乐值多少钱，取决于消费者的口味
  - 但不管消费者的口味是怎样的，在汉堡和可乐的价格给定了之后，只要不存在套利机会，汉堡和可乐套餐的价格就一定等于汉堡的价格加上可乐的价钱
  - 基于汉堡和可乐的价格，给汉堡可乐套餐定价时不需要考虑消费者的口味

- 风险中性定价的直觉
  - 消费者的风险偏好当然会影响资产价格
  - 但在给定了一些资产的价格信息，运用无套利条件来给其他一些相关资产定价时，消费者的风险偏好就没有用了——因为套利机会是否存在，与投资者的风险偏好无关
  - 所以可以假设所有投资者都是风险中性的，用已知资产价格信息求出风险中性概率，再用风险中性概率来求取资产价格