《金融经济学二十五讲》配套课件

第14讲 无套利定价初探

徐高 博士

2019年4月8日

远期与期货的定价

- 远期合约（forward contract）：在未来某一约定时刻以约定的价格买卖某产品的合约
- 期货（futures）：在期货交易所交易的标准化的远期合约
- 期货（远期）的定价方法
  - 一项不产生任何收入的资产，它当前的**现货价格**（spot price）为S_0
  - 当前，这一资产在T期后的**远期价格**（forward price）为F_0
  - 从当前到T时刻的无风险利率为r（按连续复利计算）
- 由无套利的原则，必有

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

  - 如果$F_0 > S_0 e^{rT}$，投资者可以在现货市场上买入资产，并在远期市场上卖空远期合约来套利
  - 如果$F_0 < S_0 e^{rT}$时，可以通过做空现货，做多远期来套利

14.1 远期与期货
远期价格 vs. 对未来现货价格的预期

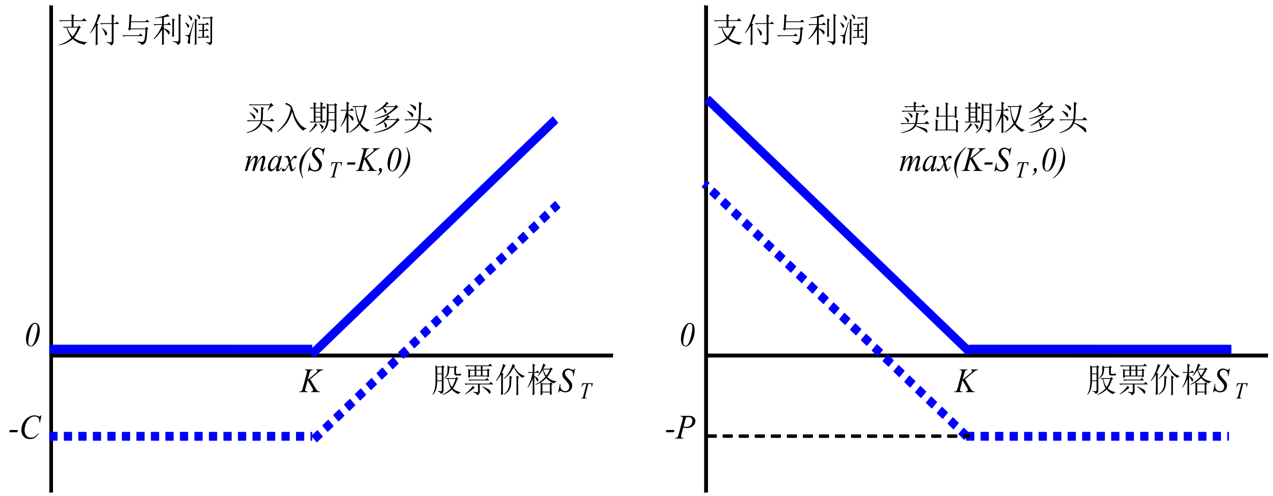
- 远期价格 vs. 现在对未来某个时期现货价格的预期——如何理解这二者的关系？
  - 直觉：远期价格是现在所预期的未来某时刻的现货价格
  - 数学：远期价格和现货价格之间存在着精确的数量关系，从而只是现货价格的一个衍生价格
- 投资者在T期后需要获得一单位资产，无套利应使得她对两种方式无差异
  - 买入期货合约，从而将未来支付的价格锁定在F_0（未来的支付用无风险利率r贴现）
  - 等到T期后，在现货市场上以价格S_T买入资产（未来的支付不确定，用贴现率k贴现）

$$F_0 e^{-rT} = E(S_T) e^{-kT}$$

- 只有现货价格的β=0时（即现货价格不包含系统性风险），才有r=k——期货价格等于对未来现货价格的预期
- 现在的现货价格和远期价格均包含相同的对未来预期的信息量，只不过因为风险溢价的存在，二者并不严格相等

14.2 期权
期权基本概念

- 欧式买入（European Call）或欧式卖出（European Put）期权，是给期权的购买者在未来某一约定时刻，以某一确定价格*K*从期权出售者处买入或卖出一单位标的资产的权利（而非义务）
  - 到期日，或叫行权日（maturity date）：执行其权利的约定时刻
  - 执行价格或是行权价格（exercise price）：约定的买卖价格*K*
  - 标的资产（underlying asset）：期权买卖的资产
  - 期权的内在价值（intrinsic value）：现在立即执行期权能获得的支付
    - 买入期权内在价值：资产价格减去行权价格（*S-K*）
    - 卖出期权内资价值：行权价格减去资产价格（*K-S*）



14.2 期权
期权分类

- 期权分类
  - 普通期权（plain vanilla options）：常见的欧式和美式期权
    - 欧式期权（European option）：只能在到期日才能选择执行权利的期权
    - 美式期权（American option）：从期权合约卖出到到期日（包含到期日）这段时间内的任意时点都能选择执行权利的期权
  - 奇异期权（exotic options）：非欧式和美式的期权

- 期权内在价值分类
  - 实值（in the money）期权：内在价值大于0的期权
  - 平值（at the money）期权：内在价值等于0的期权
  - 虚值（out of the money）期权：内在价值小于0的期权

期权买卖权平价关系（Put-Call Parity）

- 假设T时刻股票的价格为S_T，以下的组合A和组合B到T时刻的价格都为$max(S_T,K)$
  - 组合A：一个欧式股票买入期权（在T时刻以K的价格买入一股股票的权利），和现在手上Ke^{-rT}的现金（其中r是利率，Ke^{-rT}的现金在T时刻会变成K的现金）
  - 组合B：一个欧式卖出期权（在T时刻以K的价格卖出一股股票的权利），和现在手上的1股股票
- 假设0时刻的欧式买入期权价格是C，欧式卖出期权价格是P，股票价格是S_0，则无套利会使得以下的买入和卖出期权之间的平价关系成立

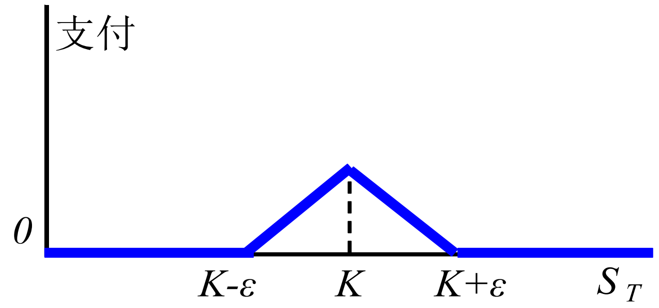
$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

14.2 期权
期权与市场的完备化

- 状态指数资产（state-index asset）：支付具有状态分离（state separating）性质的资产（ $\forall s,s'\in S$，如果$s\neq s'$，则$x_s\neq x_{s'}$）
  - 不失一般性地假设状态按照状态指数资产支付来排序——如果$s<s'$，则$x_s<x_{s'}$
- 只要存在状态指数资产，必然可以引入S-1种欧式买入期权（执行价格分别为x_1，x_2，……，x_{S-1}）来形成完备市场

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_2-x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_S & x_S-x_1 & \cdots & x_S-x_{S-1} \end{bmatrix}$$

- 期权蝶式差价（butterfly spread）策略构造阿罗证券
  - 分别买入行权价为K-ε的欧式看涨期权和行权价为K+ε的欧式看涨期权各一个
  - 卖出两个行权价为K的欧式看涨期权



14.3 衍生品定价的三种方法
模型设定

◆ 单期二叉树模型——0时刻（当前）与1时刻（未来）

$$S_0,\ 1,\ C_0 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad p \quad} \\[3ex] \xrightarrow{\quad 1\text{-}p \quad} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{股票} & \text{债券} & \text{衍生品} \\ \end{array} \atop \begin{bmatrix} uS_0 & e^r & C_u \\ dS_0 & e^r & C_d \end{bmatrix}$$

0时刻 1时刻

◆ 几点说明

– 股价变化用乘法因子（uS_0或dS_0）而非加法因子（S_0+u或S_0+d）描述，以免股价为负，以及更好符合现实世界情况
– 衍生品1时刻价格以一般的形式给出（C_u与C_d）——模型所得到的定价结论对所有衍生品都适用
– 衍生品与股票的相关性体现在：知道了股票价格的取值，可以增加我们对衍生品价格取值的了解——当股价为uS_0时，衍生品价格一定为C_u；当股价为dS_0时，衍生品价格就一定为C_d。

方法一：风险消除法定价

- 构造一个组合：包含1只衍生品，以及-Δ只股票
  - 组合0时刻价格 $\Pi_0 = C_0 - \Delta S_0$
  - 组合1时刻两个状态下支付 $\Pi_u = C_u - \Delta u S_0$，$\Pi_d = C_d - \Delta d S_0$
- 选择组合权重以消除组合中的风险（让组合在两个状态下的支付相等）

$$C_u - \Delta u S_0 = C_d - \Delta d S_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

- 消去风险后的组合在两时刻的价格

$$\Pi_0 = C_0 - \frac{C_u - C_d}{u-d} = \frac{(u-d)C_0 - C_u + C_d}{u-d}$$

$$\Pi_u = C_u - u\frac{C_u - C_d}{u-d} = \frac{uC_d - dC_u}{u-d}$$

- 无风险组合的回报率应该等于无风险利率

$$\Pi_0 = e^{-r}\Pi_u \quad \Rightarrow \quad (u-d)C_0 = e^{-r}\left[e^r C_u - e^r C_d + uC_d - dC_u\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_0 = e^{-r}\left[\frac{e^r - d}{u-d}C_u + \frac{u - e^r}{u-d}C_d\right]$$

方法二：复制法定价

《金融经济学二十五讲》配套课件

- 构造组合来复制衍生品（组合中包含Δ单位股票和B单位无风险债券）

$$\begin{cases} \Delta u S_0 + e^r B = C_u \\ \Delta d S_0 + e^r B = C_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \dfrac{C_u - C_d}{(u-d)S_0} \\ B = \dfrac{uC_d - dC_u}{e^r(u-d)} \end{cases}$$

- 衍生品在0时刻的价格应为

$$\begin{aligned} C_0 &= \Delta S_0 + B \\ &= \left(\frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}\right) S_0 + \frac{uC_d - dC_u}{e^r(u-d)} \\ &= \frac{e^r(C_u - C_d) + uC_d - dC_u}{e^r(u-d)} \\ &= e^{-r}\left[\frac{e^r - d}{u-d} C_u + \frac{u - e^r}{u-d} C_d\right] \end{aligned}$$

14.3 衍生品定价的三种方法

方法三：风险中性定价

- 假想存在着一个与真实世界类似的“平行世界”——风险中性世界（risk neutral world）
  - 风险中性世界与真实世界有着相同的资产市场结构和资产价格
  - 风险中性世界中的投资者都是风险中性的——资产价格等于未来支付用无风险利率贴现的现值
  - 风险中性世界中各种事情发生的概率与真实世界不同

- 假设在风险中性世界中，股价上涨和下跌的概率分别为q与1-q——风险中性概率（risk neutral probability）

$$S_0 = e^{-r}\left[quS_0 + (1-q)dS_0\right] \quad \Rightarrow \quad q = \frac{e^r - d}{u-d}$$

- 用风险中性概率来计算，衍生品的价格也应该等于其未来期望支付的贴现值

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-r}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \\ &= e^{-r}\left[\frac{e^r - d}{u-d}C_u + \frac{u-e^r}{u-d}C_d\right] \end{aligned}$$

对三种定价方法的评论

- 解释"风险中性定价"这种神奇方法为什么是正确的，以及这个风险中性世界与真实世界有什么联系，是无套利定价理论体系的核心内容
- 衍生品定价方程中没有直接包含真实世界中股价走高和走低的概率（p与$1-p$）；但真实世界的概率通过影响股票价格而被间接包含在了衍生品价格中
- 用股票和债券来复制衍生品，既定出了衍生品的价格，也给出了对冲衍生品的方法——对冲与定价同样重要
- 有关Δ这个变量
  - 衍生品价格相对标的资产价格变化的敏感度叫做Delta，用Δ来表示
  - Delta对冲，就是将组合的Delta调整成0——这样无论标的资产的价格如何变化，组合的价值都保持不变
  - 第一种定价方法中由衍生品和股票组成的组合，Delta就是0