《金融经济学二十五讲》配套课件

# 第13讲 多因子模型与APT

徐高 博士

2019年4月1日

# 13.1 从绝对定价到相对定价

- 绝对定价（均衡资产定价）
  - 利：用统一而完整的理论模型将各种因素糅合在一起，从无到有定出各类资产价格，并呈现出资产价格背后的深层次逻辑
  - 弊：数量上不够精确，实践中使用不便
- 相对定价（无套利资产定价）
  - 以"一价定律"为基本思想，假设市场中不存在套利机会
  - 实践中可以达到比绝对定价更高的精确度
  - 需要以一些资产的价格为已知条件，方能定出与这些资产相关的其他资产的价格
  - 除无套利外，无法对资产价格背后的深层次机制讲出太多道理
- 绝对定价与相对定价代表资产定价的两条不同思路，各有利弊，不能说谁比谁更好

# 13.2 从单因子到多因子

- CAPM中的证券市场线（SML）

$$E[\tilde{r}_j]=r_f+\beta_{M,j}\left(E[\tilde{r}_M]-r_f\right)$$

- 写成因子模型（factor model）的形式

$$\tilde{r}_j-r_f=\alpha_j+\beta_{M,j}(\tilde{r}_M-r_f)+\tilde{\varepsilon}_j$$

  - 资产的期望回报率受到一些共同因素的影响。这些共同的因素就是因子（factor）
  - 一个因子的解释力不够，就多加些因子进去——计量的思维

- Fama与French提出的三因子模型（1993年）

$$\tilde{r}_i-r_f=\alpha_i+\beta_{iM}(\tilde{r}_M-r_f)+\beta_{is}\tilde{S}MB+\beta_{ih}\tilde{H}ML+\tilde{\varepsilon}_i$$

  - $\tilde{S}MB$是市值因子，表征了上市公司的规模大小；$\tilde{H}ML$是账面市值比（book to market），是公司的账面价值除以公司股票总市值

# 13.3 多因子模型的直觉
## C-CAPM框架下的单因子模型

- 把资产回报率向一些解释变量做回归，虽然总能得到回归方程和一些回归系数，但是，
  - 这个回归方程真的能够用来给其他资产定价吗？
  - 这些回归系数又该做何种解读？

- 代表性消费的优化问题（$w_0$是消费者在0期初财富，$\tilde{r}_w$是资产市场中所有资产取得的总体回报率）

$$\max u(c_0)+\delta E[u(\tilde{c}_1)]$$
$$\text{s.t.}\quad \tilde{c}_1=(1+\tilde{r}_w)(w_0-c_0)$$

一阶条件

$$1=E\left[\delta\frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}(1+\tilde{r}_w)\right]$$

- 假设二次型效用函数（$a$是个很大的正数）

$$u(c)=-\tfrac{1}{2}(a-c)^2$$
$$u'(c)=a-c$$

## 13.3 多因子模型的直觉

# C-CAPM框架下的单因子模型（续）

- 随机折现因子

$$\tilde{m}=\delta\frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}=\delta\frac{a-\tilde{c}_1}{a-c_0}=\delta\frac{a-(1+\tilde{r}_w)(w_0-c_0)}{a-c_0}=\delta\frac{a}{a-c_0}-\delta\frac{w_0-c_0}{a-c_0}(1+\tilde{r}_w)$$

$$=A-B\tilde{r}_w$$

其中 $A\equiv\delta\frac{a}{a-c_0}-\delta\frac{w_0-c_0}{a-c_0},\qquad B\equiv\delta\frac{w_0-c_0}{a-c_0}$

- 从随机折现因子到资产期望回报率

$$1=E\left[\tilde{m}(1+\tilde{r}_j)\right]\Rightarrow 1=E[\tilde{m}](1+E[\tilde{r}_j])+\operatorname{cov}(\tilde{m},\tilde{r}_j)$$

因此

$$E[\tilde{r}_j]=\frac{1}{E[\tilde{m}]}-1-\frac{\operatorname{cov}(\tilde{m},\tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]}=r_f-\frac{\operatorname{cov}(\tilde{m},\tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]}$$

$$=r_f-\frac{\operatorname{cov}(A-B\tilde{r}_w,\tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]}=r_f+\frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_w,\tilde{r}_j)}{\operatorname{var}(\tilde{r}_w)}\frac{B\operatorname{var}(\tilde{r}_w)}{E[\tilde{m}]}$$

$$=r_f+\beta_{j,w}\lambda_w$$

其中

$$\beta_{j,w}\equiv\frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_w,\tilde{r}_j)}{\operatorname{var}(\tilde{r}_w)},\qquad \lambda_w=\frac{B\operatorname{var}(\tilde{r}_w)}{E[\tilde{m}]}$$

## 13.3 多因子模型的直觉
# C-CAPM框架下的多因子模型

《金融经济学二十五讲》配套课件

- 消费者除拥有初始财富$w_0$外，还在0期与1期分别拥有工资性收入$y_0$与$\tilde{y}_1$，且工资收入与资产市场总回报独立（$cov(\tilde{y}_1,\tilde{r}_w)=0$）

$$\max u(c_0)+\delta E[u(\tilde{c}_1)]$$
$$\text{s.t.} \quad \tilde{c}_1=(1+\tilde{r}_w)(w_0+y_0-c_0)+\tilde{y}_1$$

- 二次型效用下，随机折现因子为

$$\tilde{m}=\delta\frac{a-(1+\tilde{r}_w)(w_0+y_0-c_0)-\tilde{y}_1}{a-c_0}=A'-B'\tilde{r}_w-C'\tilde{y}_1$$

其中

$$A'=\delta\frac{a}{a-c_0}-\delta\frac{w_0+y_0-c_0}{a-c_0}, \quad B'=\delta\frac{w_0+y_0-c_0}{a-c_0}, \quad C'=\delta\frac{1}{a-c_0}$$

# 13.3 多因子模型的直觉
## C-CAPM框架下的多因子模型（续）

- 资产期望回报率为

$$E[\tilde{r}_j] = r_f - \frac{\mathrm{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]} = r_f - \frac{\mathrm{cov}(A' - B'\tilde{r}_w - C'\tilde{y}_1, \tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]}$$

$$= r_f + \frac{B'\,\mathrm{cov}(\tilde{r}_w, \tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]} + \frac{C'\,\mathrm{cov}(\tilde{y}_1, \tilde{r}_j)}{E[\tilde{m}]}$$

$$= r_f + \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_w, \tilde{r}_j)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_w)} \frac{B'\,\mathrm{var}(\tilde{r}_w)}{E[\tilde{m}]} + \frac{\mathrm{cov}(\tilde{y}_1, \tilde{r}_j)}{\mathrm{var}(\tilde{y}_1)} \frac{C'\,\mathrm{var}(\tilde{y}_1)}{E[\tilde{m}]}$$

$$= r_f + \beta'_{j,w}\lambda'_w + \beta'_{j,y}\lambda'_y$$

其中 $\beta'_{j,w} = \dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_w, \tilde{r}_j)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_w)}$， $\beta'_{j,y} = \dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{y}_1, \tilde{r}_j)}{\mathrm{var}(\tilde{y}_1)}$， $\lambda'_w = \dfrac{B'\,\mathrm{var}(\tilde{r}_w)}{E[\tilde{m}]}$， $\lambda'_y = \dfrac{C'\,\mathrm{var}(\tilde{y}_1)}{E[\tilde{m}]}$

- 因子：随机折现因子中不确定性的来源
  - 因子是那些会影响人对资产选择的不同不确定性来源
  - 为了补偿对因子不确定性的承担，资产需要根据自身回报率与各个因子的相关性，在期望回报率中给出相应的风险溢价

# 套利资产定价理论（APT）

- APT的思想：当所有资产的期望回报率都由一组共同的因子（不确定性来源）所决定的时候，基于无套利的思想，不同资产期望回报率之间会具有某种线性关系
- APT和因子模型相当抽象，既没有说因子是什么，该怎么去选取，也没有规定资产对各个因子的敏感性如何估计——这恰恰是APT理论一般性、灵活性的体现
- 三个概念
  - 因子风险（factor risk）：因子所带来的不确定性
  - 载荷（loading）：因子前的系数$\beta$
  - 个体风险（idiosyncratic risk）：与因子风险无关的剩余风险$\tilde{\varepsilon}_i$

# 13.4.1 精确单因子模型

- 假设只有一个风险因子$\tilde{f}$（简化假设$E[\tilde{f}]=0$），所有资产个体风险为0（$\tilde{\varepsilon}_i=0$），并记$\bar{r}_i=E[\tilde{r}_i]$

$$\tilde{r}_i=\bar{r}_i+\beta_i\tilde{f}$$

$$\tilde{r}_j=\bar{r}_j+\beta_j\tilde{f}$$

- 构造一个组合$\tilde{r}_p$，把我们正规化为1的总财富分配到两类资产上。组合中包含$w$份额的资产$i$与$1-w$份额的资产$j$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_p&=w\tilde{r}_i+(1-w)\tilde{r}_j\\&=[w\bar{r}_i+(1-w)\bar{r}_j]+[w\beta_i+(1-w)\beta_j]\tilde{f}\end{aligned}$$

- 选择$w$来让组合$\tilde{r}_p$的因子载荷为0，将这样的组合权重叫做$w_0$

$$w_0\beta_i+(1-w_0)\beta_j=0\quad\Rightarrow\quad w_0=\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}$$

- 权重$w_0$代回组合$\tilde{r}_p$的表达式，得到一个无风险组合$p_0$

$$\tilde{r}_{p_0}=w_0\tilde{r}_i+(1-w_0)\tilde{r}_j=\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\bar{r}_i+\left(1-\frac{\beta_j}{\beta_j-\beta_i}\right)\bar{r}_j=\frac{\beta_j\bar{r}_i-\beta_i\bar{r}_j}{\beta_j-\beta_i}$$

# 13.4.1 精确单因子模型（续1）

- 由于$p_0$是无风险组合，所以当市场不存在套利机会的时候，其期望回报率应该与无风险利率$r_f$相等

$$\frac{\beta_j \bar{r}_i - \beta_i \bar{r}_j}{\beta_j - \beta_i} = r_f \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} = \frac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j}$$

- 上面的等式对任意资产$i$和$j$都成立。所以可以定义一个常数$\lambda$为

$$\lambda \equiv \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} = \frac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j}$$

- 资产$i$的期望回报率必然满足

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i \lambda \qquad \forall i$$

- 构造组合$p_1$使其因子载荷正好为1；组合$p_1$中资产$i$的权重为$w_1$

$$w_1 \beta_i + (1 - w_1)\beta_j = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{1 - \beta_j}{\beta_i - \beta_j}$$

# 13.4.1 精确单因子模型（续2）

《金融经济学二十五讲》配套课件

◆ 将$w_1$代回组合$p$的表达式

$$\tilde{r}_{p_1}=\left[\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\overline{r_i}+\left(1-\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\right)\overline{r_j}\right]+\tilde{f}$$

$$=\left[\frac{1-\beta_j}{\beta_i-\beta_j}\overline{r_i}+\frac{\beta_i-1}{\beta_i-\beta_j}\overline{r_j}\right]+\tilde{f}$$

$$=\frac{\overline{r_i}-\beta_j\overline{r_i}+\beta_i\overline{r_j}-\overline{r_j}}{\beta_i-\beta_j}+\tilde{f}$$

$$=\frac{\beta_i\overline{r_j}-\beta_j\overline{r_i}}{\beta_i-\beta_j}+\frac{\overline{r_i}-\overline{r_j}}{\beta_i-\beta_j}+\tilde{f}$$

$$=r_f+\lambda+\tilde{f}$$

$$\begin{cases} r_f=\dfrac{\beta_j\overline{r_i}-\beta_i\overline{r_j}}{\beta_j-\beta_i} \\ \lambda=\dfrac{\overline{r_j}-\overline{r_i}}{\beta_j-\beta_i} \end{cases}$$

将$r_f$代入$\lambda$的表达式可得

# 13.4.1 精确单因子模型（续3）

- 对上式两边取期望，并注意到$E[\tilde{f}]=0$，可得

$$\lambda=\bar{r}_{p_1}-r_f$$

  - $\lambda$是因子载荷为1的资产的超额回报率
    - 风险载荷为1的组合叫做因子组合（factor portfolio）
    - 其风险溢价$\lambda$叫做因子溢价（factor premium）

- 在精确单因子模型中，任何资产的期望收益率都可以表示为

$$\bar{r}_i=r_f+\beta_i(\bar{r}_{p_1}-r_f)$$

- 上式虽与CAPM中的证券市场线（SML）形式类似，但有本质不同
  - CAPM中，市场组合的含义非常清楚
  - 因子模型式中，组合$p_1$没有那么明确的经济含义（只是因子载荷为1的资产而已）——这既可以说成是因子模型的模糊性，也可以说是其灵活性
  - CAPM基于均衡，APT基于无套利

# 13.4.2 多因子模型下的APT

- 单因子时的推导思路
  - 由于资产数量大于因子数量，因而可以构造组合来消除因子风险（组合对因子的载荷为0），从而把不同资产的期望回报率和它的$\beta$联系起来
  - 再构造一个对某单一因子载荷为1的组合（因子组合），这个组合的风险溢价就是对应的$\beta$的价格
  - 二者结合起来，得到了资产的定价方程

- 多因子下的假设
  - $K$个会影响资产回报率的因子，$N$种资产（$N$远大于$K$）
  - 因子和个体风险期望为0：$E[\tilde{f}_k]=E[\tilde{\varepsilon}_i]=0$
  - 因子方程为1，个体风险方差相等：$E[\tilde{f}_k^2]=1$，$E[\tilde{\varepsilon}_i^2]=\sigma_\varepsilon^2<\infty$
  - 因子、个体风险间两两独立：任给$k\neq k'$，$i\neq i'$，有$E[\tilde{f}_k\tilde{f}_{k'}] = E[\tilde{\varepsilon}_i\tilde{\varepsilon}_{i'}] = E[\tilde{f}_k\tilde{\varepsilon}_i] = 0$

$$\tilde{r}_i = \bar{r}_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k}\tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

# 13.4.2 多因子模型下的APT（续1）

- 由所有$N$种资产形成的组合$p$（组合中资产$i$的份额为$w_i$，$\Sigma_i w_i=1$）

$$\tilde{r}_p=\sum_{i=1}^{N}w_i\tilde{r}_i=\sum_{i=1}^{N}w_i\overline{r}_i+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\beta_{i,1}\right)\tilde{f}_1+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\beta_{i,K}\right)\tilde{f}_K+\sum_{i=1}^{N}w_i\tilde{\varepsilon}_i$$

- 选择权重来将组合$p$中的因子风险完全消除掉

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}w_i\beta_{i,1}=0\\ \qquad\vdots\\ \sum_{i=1}^{N}w_i\beta_{i,K}=0\end{cases}$$

- 在$N>K$的时候，这个方程组是有解的（解可能不止一组）;将解出的权重代回组合$p$的表达式

$$\tilde{r}_{p0}=\sum_{i=1}^{N}w_i\overline{r}_i+\sum_{i=1}^{N}w_i\tilde{\varepsilon}_i$$

# 13.4.2 多因子模型下的APT（续2）

- $\tilde{r}_{p0}$的方差为 $\sigma^2(\tilde{r}_{p0}) = (w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_N^2)\sigma_\varepsilon^2$
- 当资产的数量很大时（$N$很大），每个权重就大概为$1/N$。因此，$\sigma^2(\tilde{r}_{p0})$的量级就为

$$\left(\frac{1}{N}\right)^2 \times N \times \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N}$$

- 由于个体风险的方差不是无穷大，所以当$N\to\infty$时，$\sigma^2(\tilde{r}_{p0}) \to 0$，即消除了因子风险的组合几乎是无风险的

$$\tilde{r}_{p0} \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{r}_i = r_f$$

- 上式中的$w_i$均为各个$\beta$的函数（因为$w_i$是方程组的解），所以上式事实上是把各个资产的期望回报率$\bar{r}_i$表示成了无风险利率与$\beta$的函数。采用单因子模型的思路可得

$$\bar{r}_i = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{i,k} \lambda_k$$

$\lambda_k$为第$k$个因子的因子溢价——即对因子$k$的载荷为1，而对其他因子载荷为0的组合的风险溢价

# 13.5 对多因子模型的评论

- 多因子模型（APT）提供了一个解释并预测不同资产回报率的非常灵活的框架（文献中已经提出了数百个可供用来解释资产回报率的因子）
- 多因子模型加深了我们对风险的认识：系统风险并不仅仅只是整个市场或经济的波动，还可能来自其他源头——某投资者收获了Alpha，既有可能确实是因为她投资能力强，也可能是因为她其实只是承担了一些我们还未观测到的系统风险
- 因子可以是那些直接可观测的变量，也可以是无法观测的因子——潜在因子（latent factor）
- 样本内拟合和样本外拟合的效果有重大差异
  - 用当前的因子来解释当前资产收益率的差异，往往可以得到相当不错的拟合优度（$R^2$甚至可以超过90%）
  - 在预测性因子模型中，即用当前的因子预测未来资产收益率，拟合优度往往很低，$R^2$甚至很难超过2%

# 13.6 多因子模型的应用
## 对冲

- 假设对某一资产$\tilde{r}_0$构建了如下的多因子模型，用其他$N$种资产的回报率（$\tilde{r}_n$）来解释这种资产的回报率

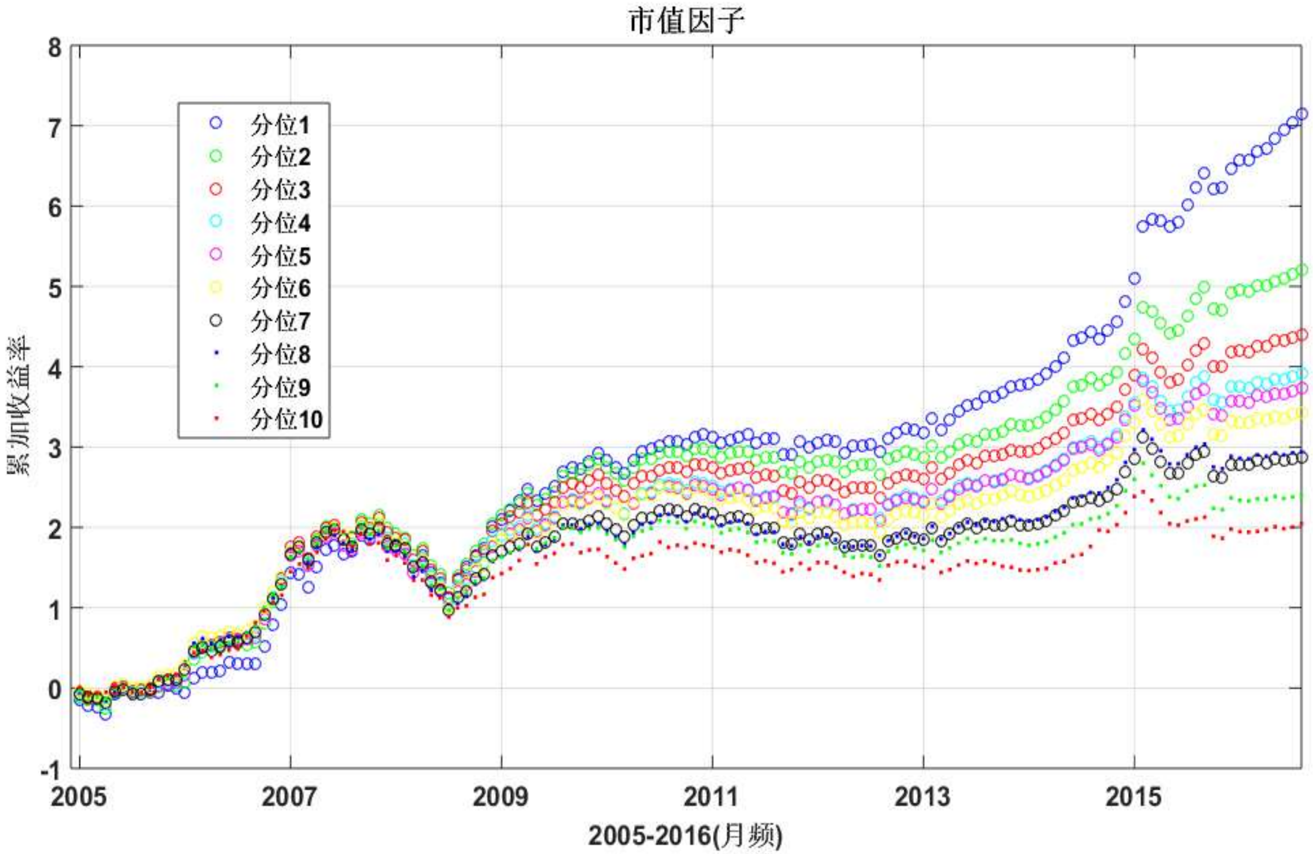
$$\tilde{r}_0 - r_f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \beta_{0,n}\tilde{r}_n + \tilde{\varepsilon}_0$$

- 估计出了上面的方程，也就找出了用$N$种资产来尽可能逼近资产$\tilde{r}_0$的方法。相应地，组合$\Sigma_n\beta_{0,n}\tilde{r}_n$就可以用来对冲资产$\tilde{r}_0$。

- Alpha-Beta分离（可转移Alpha）
  - 如果APT成立，那么回归方程中的截距项$\alpha_0$应该为0——但存在$\alpha_0$大于0的可能性（一位杰出基金经理创造了Alpha）
  - 只要$\alpha_0$稳定地为正，可以通过买入资产$\tilde{r}_0$，卖出组合$\Sigma_n\beta_{0,n}\tilde{r}_n$来将$\alpha_0$给分离出来，获取稳定的收益

# 13.6 多因子模型的应用
## 因子选股

- 一个因子代表了一个对股票期望回报率有解释力的因素。如果这种解释力很强，那么用因子来给所有股票从好到坏排个序，买入排在前面的股票（卖出排在后面的股票），就应该能获得不错的回报



# 13.6 多因子模型的应用
## 统计套利

- 总共有$J$只股票可选，这些股票的期望回报率受到总共$K$个因子的影响；对任何一只股票$j$，建立多因子计量模型

$$\tilde{r}_j - r_f = \alpha_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{j,k} \tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_j$$

股票$j$的期望回报率应该为

$$E[\tilde{r}_j] = r_f + \alpha_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{j,k} E[\tilde{f}_k]$$

- 做多（买入）那些实际回报率不及期望回报率的股票，做空（卖出）那些实际回报率高于期望回报率的股票

- 统计套利不是套利！
  - 长期资本管理公司（LTCM）的教训