《金融经济学二十五讲》课程讲义

第12讲 C-CAPM及其讨论

徐高 博士

2019年3月30日

C-CAPM讨论路线图

	CAPM	C-CAPM
偏好	均值-方差偏好	期望效用 （第8讲）
行为	组合优化	不确定性下的行为 （第9讲）
均衡	部分均衡（资产市场）	一般均衡（整个经济） （第10讲）
资产定价	证券市场线（SML）	C-CAPM定价方程 （第11、12讲）

12.1 C-CAPM定价理论

- 资产定价问题就是如何找出随机折现因子$\tilde{m}$的问题
  - 理论上：构造随机折现因子，说明它反映了何种影响资产价格的力量
  - 实践中：将随机折现因子与可观测数据联系起来，从而给资产定价

$$p_j = E\left[\tilde{m}\tilde{x}_j\right] \quad \Leftrightarrow \quad 1 = E\left[\tilde{m}(1+\tilde{r}_j)\right]$$

- 基于消费的资产资本定价模型（C-CAPM）

$$p_j = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}\tilde{x}_j\right] \quad \Leftrightarrow \quad 1 = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}(1+\tilde{r}_j)\right]$$

- 一般均衡中所有因素相互影响，任意两个内生变量之间都存在双向因果关系；根据研究课题的关注点而聚焦到某个方向的因果关系上
  - 资产定价研究：c_0，$\tilde{c}_1$，$\tilde{x}\rightarrow p$
  - 消费行为研究：p，$\tilde{x} \rightarrow c_0$，$\tilde{c}_1$

12.2 无风险利率的决定

无风险利率表达式的推导

- 从无风险利率开始对资产期望回报率（资产价格）的研究

$$E[\tilde{r}_j] = r_f + \left(E[\tilde{r}_j] - r_f\right)$$

- 定义消费的增长率为

$$\tilde{g} \equiv \frac{\tilde{c}_1}{c_0} - 1$$

- 定义$\bar{g} \equiv E[\tilde{g}]$为消费增长率的期望值

$$\mathrm{var}(\tilde{g}) = E[\tilde{g} - \bar{g}]^2 = E[\tilde{g}^2] - 2\bar{g}E[\tilde{g}] + \bar{g}^2 = E[\tilde{g}^2] - \bar{g}^2 \approx E[\tilde{g}^2]$$

（在$\bar{g}$比较小时，$\bar{g}^2$近似于0）

12.2 无风险利率的决定

无风险利率表达式的推导（续1）

◆ 随机折现因子二阶泰勒展开（R_R相对风险规避系数，P_R相对审慎系数）

$$\tilde{m} = \delta \frac{u'(c_0(1+\tilde{g}))}{u'(c_0)}$$

$$\approx \frac{\delta}{u'(c_0)}\left[u'(c_0) + u''(c_0)c_0\tilde{g} + \tfrac{1}{2}u'''(c_0)c_0^2\tilde{g}^2\right]$$

$$= \delta\left[1 - \left(-\frac{c_0 u''(c_0)}{u'(c_0)}\right)\tilde{g} + \frac{1}{2}\left(-\frac{c_0 u''(c_0)}{u'(c_0)}\right)\left(-\frac{c_0 u'''(c_0)}{u''(c_0)}\right)\tilde{g}^2\right]$$

$$= \delta\left(1 - R_R\tilde{g} + \tfrac{1}{2}R_R P_R \tilde{g}^2\right)$$

◆ 利用前面推导的近似关系有

$$E[\tilde{m}] \approx E\left[\delta\left(1 - R_R\tilde{g} + \tfrac{1}{2}R_R P_R\tilde{g}^2\right)\right]$$

$$= \delta\left[1 - R_R E(\tilde{g}) + \tfrac{1}{2}R_R P_R E(\tilde{g}^2)\right]$$

$$\approx \delta\left(1 - R_R\bar{g} + \tfrac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)$$

12.2 无风险利率的决定

无风险利率表达式的推导（续2）

- 无风险利率的表达式（消费者的主观贴现率定义为$\rho \equiv 1/\delta - 1$）

$$
\begin{aligned}
r_f &= \frac{1}{E[\tilde{m}]} - 1 \\
&\approx \frac{1}{\delta\left(1 - R_R\bar{g} + \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)} - 1 \\
&= \frac{1 - \delta + \delta R_R \bar{g} - \frac{1}{2}\delta R_R P_R \sigma_g^2}{\delta\left(1 - R_R\bar{g} + \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)} \\
&\approx \frac{1-\delta}{\delta} + R_R\bar{g} - \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2 \\
&= \rho + R_R\bar{g} - \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2
\end{aligned}
$$

因为$\bar{g}$与$\sigma_g{}^2$都是较小的数，所以在分母中忽略去它们，将分母直接变成δ（近似关系：当x很小时，$a/(1+x) \approx a$）

12.2 无风险利率的决定
对无风险利率表达式的说明

- 推导过程的技术性说明
  - 近似并非任意，而是遵循泰勒展开（参见附录12.B）
  - 时间间隔越短，近似误差越小——连续时间金融中约等号就会变成等号
  - 推导结论是可靠的，反映了真实不虚的金融逻辑

- 无风险利率中的三股决定力量
  - **人性不耐**（$\rho=1/\delta-1$）：消费者越不耐心，越不愿储蓄，越是需要更高的无风险利率来平衡
  - **经济增长**（$R_R\overline{g}$）：经济增速越快，越不愿储蓄，越是需要更高的无风险利率来平衡
  - **预防性储蓄**（$-0.5R_RP_R\sigma_g^2$）：经济增长的波动性越大，消费者出于预防性动机的储蓄意愿越强，所需要平衡的无风险利率就越低

12.2 无风险利率的决定
对无风险利率表达式的说明（续）

- 三点评论
  - 推导出来的是真实无风险利率（以消费品为计价物计算的无风险利率），对应真实真实世界中的国债利率减去通胀预期
  - 无风险利率作为资金的时间价值并不仅仅取决于人的主观耐心程度（所以表达式中不仅仅包含ρ）
  - 均衡思想：有力量导致消费者储蓄意愿降低（升高）时，就必然会有更高（更低）的利率来与之平衡

- 消费品不可储存假设与储蓄
  - 微观层面的消费者总是可以储蓄的——签订金融契约把自己的消费品借给别人，换取别人未来消费品的偿付
  - 利率的变化保证了微观层面消费者（基于利率的最优）行为与宏观层面的物理约束匹配
  - 尽管在技术上没有储存消费品的可能，但可以用储蓄动机来分析利率的变化

12.3 风险溢价的决定

- 风险溢价由资产回报率与代表性消费者边际效用之间的协方差决定
  - “雪中送炭”型资产风险溢价小：回报率与边际效用正相关性强（与总消费负相关性强）
  - “锦上添花”型资产风险溢价大：回报率与边际效用负相关性强（与总消费正相关性强）

$$E[\tilde{r}_j]-r_f=-\frac{\delta(1+r_f)}{u'(c_0)}\operatorname{cov}\left(u'(\tilde{c}_1),\tilde{r}_j\right)$$

- 资产的风险溢价由系统风险而非个体风险决定
  - 完备市场中消费者只承担总消费（总禀赋）的波动，其他波动可被分散掉
  - 总消费波动就是系统性风险，超出其波动的波动是个体风险
  - 资产回报中那些与总消费波动相关的部分才是需要承担的“真正风险”，才会影响资产风险溢价

12.4.1 无风险利率之谜

- 假设CRRA效用函数（$R_R=\gamma$，$P_R=\gamma+1$）

$$r_f=\rho+\gamma\bar{g}-\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\sigma_g^2$$

- 无风险利率之谜（risk free rate puzzle）
  - 中国数据（2005-2015）：$\rho=0.02$（对应$\delta\approx0.98$），$\gamma=2$，$\bar{g}=9.7\%$，$\sigma^2_g=0.0005$，

$$\begin{aligned}r_f&=\rho+\gamma\bar{g}-\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\sigma_g^2\\&=0.02+2\times0.097-\tfrac{1}{2}\times2\times3\times0.0005\\&=2\%+19.4\%-0.15\%\\&=21.25\%\end{aligned}$$

  - C-CAPM给出了远高于真实世界的真实利率值（真实世界里接近0%）

12.4.2 风险溢价之谜

◆ 效用函数为CRRA时，$\tilde{m}=\delta(1+\tilde{g})^{-\gamma}$

$$E[\tilde{r}_j]-r_f=-(1+r_f)\delta\operatorname{cov}((1+\tilde{g})^{-\gamma},\tilde{r}_j)$$

$$(1+\tilde{g})^{-\gamma}\approx 1-\gamma\tilde{g} \dashrightarrow \approx -\delta(1+r_f)\operatorname{cov}(1-\gamma\tilde{g},\tilde{r}_j)$$

$$=\delta\gamma(1+r_f)\operatorname{cov}(\tilde{g},\tilde{r}_j)$$

$$=\gamma(1+\delta\gamma\bar{g})\operatorname{cov}(\tilde{g},\tilde{r}_j) \dashleftarrow r_f\approx\rho+\gamma\bar{g}\Rightarrow 1+r_f=\tfrac{1}{\delta}+\gamma\bar{g}$$

◆ **风险溢价之谜（equity premium puzzle）**

– 美国数据（1889-1978）： δ=0.999，$\bar{g}$=1.8%，σ_g=3.6%，r_f=0.8%，$r_{S\&P500}$=7.0%，$\sigma_{S\&P500}$=16.5%，$cov(\tilde{g}, r_{S\&P500})$ =0.3%，股票风险溢价6.2%

$$6.2\%=\gamma(1+0.999\times1.8\%\times\gamma)\times0.3\%$$

– 从中解出γ=16——为了解释在真实世界中所观察到的股票的风险溢价，必须假设消费者有高得不合理的相对风险规避系数

– 就算接受γ=16，无风险利率也会远高于真实世界观测值（0.8%）

$$r_f=\rho+\gamma\bar{g}=0.1\%+16\times1.8\%=28.9\%$$

专题框12-1：风险规避系数的微观估计

- 问题：有1/2的概率其财富会增加50%，还有1/2的概率其财富会减少50%。为了消除这种不确定性，愿意损失掉自己初始财富的多大比例？

$$\frac{\left(w(1-x)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}=0.5\times\frac{\left(w(1-0.5)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+0.5\times\frac{\left(w(1+0.5)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- 不同的相对风险规避系数γ对应的x

γ	2	5	10	15	20
x	25%	41%	46%	47%	48%

- 超过5的相对风险规避系数是难以让人相信的

12.4.3 对风险溢价之谜的评论

- 风险溢价难题是金融理论所取得的一个了不起的成就：有了用来与现实世界中观察到的资产价格进行比较的标尺
  - CAPM无法直接用现实数据来检验（不是可用的标尺）——检验时会联合检验两个假设：（1）CAPM本身是否成立；（2）检验时找的市场组合找得对不对
- 风险溢价之谜暴露了理论的不足，因而刺激了金融理论的发展
- 风险溢价之谜产生的最重要原因是，在模型中用相对风险规避系数这个参数表征了两种不同的经济力量（跨期与跨状态的消费平滑意愿）

12.5 对资产定价逻辑的再思考

- 关键问题
  - 投资者为什么会买卖资产？
  - 市场上为什么会存在对资产的交易？
- 误导的逻辑
  - 对同一种资产有不同的观点不同才会形成交易——有买有卖才有交易
  - 正确的观点挣钱，错误的观点亏钱
  - 资产交易是个零和博弈
- 正确的逻辑
  - 对同一种资产的不同观点可能都是对的——投资者的消费状况决定了他对资产的评价
  - 资产的交易实现了资源的跨期和跨状态交换，最终交换了不同人的消费，实现了风险分散
  - 资产交易是个正和博弈
- 投资分析的正确思路：不是猜心，而是把握市场中那看不见的手