《金融经济学二十五讲》课程讲义

第11讲
完备市场中一般均衡的性质

徐高 博士

2019年3月25日

C-CAPM讨论路线图

	CAPM	C-CAPM
偏好	均值-方差偏好	期望效用 （第8讲）
行为	组合优化	不确定性下的行为 （第9讲）
均衡	部分均衡（资产市场）	一般均衡（整个经济） （第10讲）
资产定价	证券市场线（SML）	C-CAPM定价方程 （第11、12讲）

有关资产市场中一般均衡的关键问题

- 一般均衡是否存在？
  - 可以证明，在相当宽泛的条件下，一般均衡是存在的
- 一般均衡好不好？（评价好坏的标准是什么？）
- 一般均衡中资产价格有什么样的性质？

11.1 最优风险分担
中央计划者视角寻找最优风险分担（帕累托最优）

- 中央计划者的优化问题
  - 每位消费者的权重（重要性）为μ_k（$\mu_k \geq 0$）
  - c_{ks}与e_{ks}分别为第k位消费者在第s种状态下的消费和禀赋

$$\max_{\{c_{k0},c_{k1},\cdots,c_{kS}\}_{k=1}^{K}} \sum_{k=1}^{K} \mu_k \left[u_k(c_{k0}) + \delta_k \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_k(c_{ks}) \right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{K} c_{k0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k0}$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_{ks} = \sum_{k=1}^{K} e_{ks} \qquad s = 1,\cdots,S$$

- 中央计划者问题的说明
  - 消费者的相对权重μ_k是任意选取的——这里只关心效率（帕累托最优），而不研究什么样的收入分配（相对权重的选取）是更好的
  - 中央计划者的约束仅仅是总消费不能超过总禀赋
  - 中央计划者在宽泛约束下所选择的资源分配（以及福利状况）代表了任何资源配置机制所可能达到的福利状况的上限——因而是比较的标尺

11.1 最优风险分担
中央计划者问题的求解

- 中央计划者问题对应的拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\sum_{k=1}^{K}\mu_k\left[u_k(c_{k0})+\delta_k\sum_{s=1}^{S}\pi_s u_k(c_{ks})\right]+\eta_0\left[\sum_{k=1}^{K}e_{k0}-\sum_{k=1}^{K}c_{k0}\right]+\sum_{s=1}^{S}\eta_s\left[\sum_{k=1}^{K}e_{ks}-\sum_{k=1}^{K}c_{ks}\right]$$

- 中央计划者一阶条件

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{k0}}=0:\qquad \mu_k u_k'(c_{k0})=\eta_0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{ks}}=0:\qquad \mu_k\delta_k\pi_s u_k'(c_{ks})=\eta_s$$

- 中央计划者选择的消费计划

$$c_{k0}=u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_0}{\mu_k}\right)$$

$$c_{ks}=u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_s}{\mu_k\delta_k\pi_s}\right)$$

11.1 最优风险分担

中央计划者与市场均衡的等价

- 一般均衡框架下消费者优化条件

$$u_k'(c_{k0}) = \lambda_k$$
$$\delta_k \pi_s u_k'(c_{ks}) = \lambda_k \varphi_s$$

- 一般均衡框架下消费者的消费计划

$$c_{k0} = u_k'^{-1}(\lambda_k)$$
$$c_{ks} = u_k'^{-1}\left(\frac{\lambda_k \varphi_s}{\delta_k \pi_s}\right)$$

- 中央计划者与市场均衡的消费配置相同
  - 如果令$\lambda_k=\eta_0/\mu_k$，$\varphi_s=\eta_s/\eta_0$，那么由中央计划者问题得到的配置和相应财富分布下的均衡配置完全一样
  - 换言之，如果将各个消费者的初始财富调整到适当的水平（这相当于在调整λ_k），就可以通过均衡来实现中央计划者问题中求取的最优风险分担

11.1 最优风险分担
福利经济学定理

- 两个福利经济学定理
  - **定理11.1（福利经济学第二定理）：**在完备市场中，任何一个帕累托最优配置都可以由某个对应某种财富初始分配的市场均衡来达到
  - **定理11.2（福利经济学第一定理）：**在完备市场中，任何一个由市场均衡所形成的资源分配都是帕累托最优的

- 福利经济学定理的含义
  - 规范经济学意义上，两个福利经济学定理说明了，用经济学的评价标准（帕累托最优）来衡量，市场均衡是好的
  - 经济分析方法上，当两个福利经济学定理成立的前提条件都满足的时候，可以通过求解中央计划者问题来分析均衡，从而简化分析

最优风险分担的特性：消费者消费波动只与总禀赋有关

- **定理11.3**：完备市场中达到均衡时，消费者在不同状态中消费的波动，只与各个状态中总禀赋的波动有关，而与这个消费者自己禀赋在各个状态中的波动无关

- **证明**：经济中的总消费为

$$c_s = \sum_{k=1}^{K} c_{ks} = \sum_{k=1}^{K} u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_s}{\mu_k \delta_k \pi_s}\right)$$

可知η_s为状态s下的总消费和总禀赋（c_s=e_s）的函数，$\eta_s = g(c_s) = g(e_s)$

于是

$$c_{ks} = u_k'^{-1}\left(\frac{g(e_s)}{\mu_k \delta_k \pi_s}\right)$$

又因为μ_k只与消费者的总财富，而非禀赋在不同状态下的分布有关，所以总禀赋e_s（在不同状态中）的波动决定了消费者k自己个人消费的波动。而消费者的财富则决定了她自己在不同状态下的平均消费水平。

最优风险分担的特性：消费者间的消费波动完全正相关

- **定理11.4**：对于任意两个状态s与s'，如果有$c_s>c_{s'}$，则对任意消费者k，必有$c_{ks}>c_{ks'}$

- **证明**：用反证法。在$c_s>c_{s'}$的前提下，假设存在某个k，使得$c_{ks}\le c_{ks'}$。由中央计划者优化问题的一阶条件式可以知道，对任意一个不同于k的消费者k'有

$$\mu_k\delta_k u_k'(c_{ks})=\mu_{k'}\delta_{k'}u_{k'}'(c_{k's})$$

$$\mu_k\delta_k u_k'(c_{ks'})=\mu_{k'}\delta_{k'}u_{k'}'(c_{k's'})$$

由于$u_k(\bullet)$是严格凹函数（二阶导数小于0），所以$u'_k(\bullet)$是个单调函数。因此，$c_{ks}\le c_{ks'}$必然意味着对任意一个k'来说，必然有$c_{k's}\le c_{k's'}$。这样一来，就应该有

$$\sum_{k=1}^{K}c_{ks}=c_s\le c_{s'}=\sum_{k=1}^{K}c_{ks'}$$

与前面的假设矛盾。因此，假设不成立，命题得证

11.1 最优风险分担

最优风险分担的特性：越是风险厌恶，承担风险越少

- **定理11.5（Wilson定理）：** 每位消费者所承担的边际总体风险等于他的绝对风险容忍度占所有消费者绝对风险容忍度总和的比重。如果定义**绝对风险容忍度**（absolute risk tolerance）*T*为绝对风险规避系数的倒数。即

$$T(c) \equiv \frac{1}{R_A(c)} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}$$

则消费者在某状态下的消费因总禀赋的变化而变化的幅度，等于其绝对风险容忍度占社会总风险容忍度的比重

$$\frac{dc_{ks}}{de_s} = \frac{T_k(c_{ks})}{\sum_{k=1}^{K} T_k(c_{ks})}$$

- Wilson定理含义解读：绝对风险容忍度越高（绝对风险厌恶系数越小）的消费者，其消费在不同状态下的波动性会更大。因此，实现最优风险分担的时候，那些风险容忍度高的人会承担更多的风险

11.2 代表性消费者
消费者优化的一阶条件

◆ 消费者对市场中存在的J种资产的最优选择$(\theta_1, \ldots, \theta_J)$问题

$$\max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)$$

$$\text{s.t.} \qquad c_0 = e_0 - \sum_{j=1}^{J} p_j\theta_j$$

$$c_s = e_s + \sum_{j=1}^{J} x_s^j\theta_j \qquad (s=1,\cdots,S)$$

◆ 约束条件代入目标函数得

$$\max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} u\left(e_0 - \sum_{j=1}^{J} p_j\theta_j\right)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u\left(e_s + \sum_{j=1}^{J} x_s^j\theta_j\right)$$

◆ 对θ_j的一阶条件为

$$p_j u'(c_0) = \delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u'(c_s)x_s^j$$

11.2 代表性消费者
消费者优化的一阶条件（续）

- 将上式左边两项除到等号右边去，并注意到x_s^j/p_j应该等于资产j在s状态下的（事后）总回报率$1+r_s^j$，可以得

$$1=\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s\frac{u'(c_s)}{u'(c_0)}(1+r_s^j)$$

- 将连加号的形式改写为期望的形式，并将表示消费者的下标k加回，可得

$$1=E\left[\delta_k\frac{u_k'(\tilde{c}_{k,1})}{u_k'(c_{k,0})}(1+\tilde{r}_j)\right]$$

- 从个体消费者到代表性消费者
  - 理论上来说，任意一个消费者的边际效用信息都可以给资产定价。但微观信息获取困难，且个体未必理性
  - 研究者更愿意将资产定价的结果建立在经济总量信息之上，而不是某个消费者的微观信息上，因此引入了**代表性消费者**（representative consumer）这个概念。

11.2 代表性消费者

代表性消费者

- **定理11.6**：如果所有消费者具有如下的HARA型效用函数（γ>0）

$$u_k(c_k)=\frac{(c_k-d_k)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

那么这些消费者的行为可以用效用函数如下的代表性消费者来概括

$$u(c)=\frac{(c-d)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- 代表性消费者的消费为所有消费者的总消费（$c=\sum_k c_k$），禀赋为所有消费者的总禀赋

- 定理11.6的解读
  - 如果所有消费者的效用函数都符合HARA型，就不需要关心资源在不同消费者之间的分布，而只需要用加总的总量指标来进行分析即可
  - 之所以能够做这样的简化假设，最关键的原因是前面推导出来的风险分散的结论——所有消费者的消费波动都完全正相关，只决定于总禀赋
  - HARA型效用函数本身是一个相当宽泛的效用函数族（包含了最为常用的CRRA型效用函数），并未在偏好上施加太强的假设

11.3 均衡中的资产价格
资产定价方程的推导

- 代表性消费者的优化一阶条件

$$1 = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}(1+\tilde{r}_j)\right]$$

- 定义$\tilde{m}$为**随机折现因子**（stochastic discount factor）

$$\tilde{m} \equiv \delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)}$$

- 资产定价方程

$$1 = E\left[\tilde{m}(1+\tilde{r}_j)\right]$$

- 无风险利率也符合该资产定价方程

$$1 = E\left[\tilde{m}(1+r_f)\right]$$

11.3 均衡中的资产价格
资产定价方程的推导（续）

- 上两式相减，并变形可得

$$
\begin{aligned}
0 &= E\left[\tilde{m}(1+\tilde{r}_j)\right] - E\left[\tilde{m}(1+r_f)\right] \\
&= E\left[\tilde{m}\right] + E\left[\tilde{m}\tilde{r}_j\right] - E\left[\tilde{m}\right] - E\left[\tilde{m}r_f\right] \\
&= E\left[\tilde{m}\tilde{r}_j\right] - E\left[\tilde{m}r_f\right] \\
&= \sum_{s=1}^{S}\pi_s m_s r_{j,s} - \sum_{s=1}^{S}\pi_s m_s r_f \\
&= \sum_{s=1}^{S}\pi_s m_s (r_{j,s} - r_f) \\
&= E\left[\tilde{m}(\tilde{r}_j - r_f)\right] \\
&= E\left[\tilde{m}\right]E\left[\tilde{r}_j - r_f\right] + \operatorname{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j - r_f) \\
&= E[\tilde{m}](E[\tilde{r}_j] - r_f) + \operatorname{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j) \\
&= \frac{E[\tilde{r}_j] - r_f}{1+r_f} + \operatorname{cov}(\tilde{m}, \tilde{r}_j) \qquad \left(\because E[\tilde{m}] = \frac{1}{1+r_f}\right)
\end{aligned}
$$

11.3 均衡中的资产价格
C-CAPM资产定价方程及其经济含义

- C-CAPM资产定价方程

$$E[\tilde{r}_j]-r_f=-(1+r_f)\operatorname{cov}(\tilde{m},\tilde{r}_j)$$

- 利用随机折现因子的定义式可得

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}_j]-r_f&=-(1+r_f)\operatorname{cov}\left(\delta\frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)},\tilde{r}_j\right)\\&=-\frac{\delta(1+r_f)}{u'(c_0)}\operatorname{cov}\left(u'(\tilde{c}_1),\tilde{r}_j\right)\end{aligned}$$

- 资产的期望回报率高低决定于资产回报率与边际效用的协方差
  - “雪中送炭”型资产的期望回报率低（资产价格高）：边际效用越高（消费越低）时回报越高的资产越受人追捧，期望回报率越低
  - “锦上添花”型资产的期望回报率高（资产价格低）：边际效用越高（消费越低）时回报越低的资产越缺乏吸引力，期望回报率因而越高

11.3 均衡中的资产价格

作为C-CAPM的一个特例的CAPM

- 假设
  - 二次型效用：$u(c)=-ac^2+bc$（其中$a>0$），$u'(c)=-2ac+b$
  - 市场组合M的回报就是经济的总禀赋（$x_s^M=e_s=c_s$，$\tilde{r}_M = \tilde{c}_1/p_M - 1$）
- 随机折现因子

$$\tilde{m} \equiv \delta \frac{u'(\tilde{c}_1)}{u'(c_0)} = \delta \frac{-2a\tilde{c}_1 + b}{-2ac_0 + b}$$

- C-CAPM定价式变形为

$$\begin{aligned}
E[\tilde{r}_j] - r_f &= -(1+r_f)\operatorname{cov}\left(\delta \frac{-2a\tilde{c}_1 + b}{-2ac_0 + b},\ \tilde{r}_j\right) \\
&= \delta \frac{2a(1+r_f)}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov}(\tilde{c}_1, \tilde{r}_j) \\
&= \delta \frac{2a(1+r_f)p_M}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov}\left(\frac{\tilde{c}_1}{p_M} - 1,\ \tilde{r}_j\right) \\
&= \delta \frac{2a(1+r_f)p_M}{-2ac_0 + b} \operatorname{cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_j)
\end{aligned}$$

11.3 均衡中的资产价格

作为C-CAPM的一个特例的CAPM（续）

- 将市场组合本身代入上面的式子有

$$E[\tilde{r}_M]-r_f=\delta\frac{2a(1+r_f)p_M}{-2ac_0+b}\mathrm{var}(\tilde{r}_M)$$

- 上两式相比可得

$$\frac{E[\tilde{r}_j]-r_f}{E[\tilde{r}_M]-r_f}=\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_M,\tilde{r}_j)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_M)}$$

- 定义$\beta_j=cov(\tilde{r}_M,\tilde{r}_j)/var(\tilde{r}_M)$，有

$$E[\tilde{r}_j]-r_f=\beta_j\left(E[\tilde{r}_M]-r_f\right)$$

- 市场组合的准确经济含义：市场组合就是整个宏观经济。宏观经济的禀赋部分来自经济中所有资产的总回报，但还有部分来自其它的来源（比如劳动所得等），所以市场组合的涵盖范围大于经济中所有的资产