

## 第 13 次作业

2018 年 6 月 4 日

(因临近期末, 此次作业不用交。下次习题课助教会讲评。)

**1. (长期资产可以提前变现情况下的 DD 模型)** 考虑一个包含  $t=0, 1, 2$  三个时刻的模型。模型中仅存在一种消费品, 既可以用来消费, 也可以用来投资。在  $t=0$  的时刻, 每位消费者均有 1 单位的消费品禀赋。在  $t=1, 2$  时刻, 消费者不再获得新的禀赋。在各个时刻之间, 消费者的主观贴现因子均为 1。

经济中存在两种资产可被用来做投资。其中, 短期资产(流动性资产)是一种储藏技术。它可以将  $t$  时刻的 1 单位消费品转化为  $t+1$  时刻的 1 单位消费品 ( $t=0, 1$ )。另一种是长期资产(非流动性资产)。在  $t=0$  时刻将 1 单位消费品投资到长期资产上, 在  $t=2$  的时刻可以产生  $R(>1)$  单位的消费品。我们假设在  $t=1$  时刻可以提前变现长期资产, 获得  $r$  的回报 ( $0 < r < 1$ )。

消费者在消费时间的偏好上存在不确定性。消费者有  $\lambda$  的概率是一个“前期消费者”(无耐心), 只能通过 1 时刻的消费获得效用。消费者还有  $1-\lambda$  的概率是一个“后期消费者”(有耐心), 只能通过 2 时刻的消费获得效用。消费者的效用函数为

$$U(c_1, c_2) = \begin{cases} u(c_1) & \text{概率为 } \lambda \\ u(c_2) & \text{概率为 } 1-\lambda \end{cases}$$

- (a) 在自给自足状况下, 消费者 0 时刻的期望效用是多少?
- (b) 如果有中央计划者来优化配置资源, 消费者 0 时刻的期望效用是多少?
- (c) 如果在 1 时刻存在一个市场让两类消费者相互交易资产, 消费者 0 时刻的期望效用是多少?
- (d) 如果经济中又存在银行, 又存在 1 时刻的市场, 消费者 0 时刻的期望效用是多少?

**2.** 模型中有三个时期,  $t=1, 2, 3$ 。经济中存在一种总供给量为 1 的资产。该资产在时期 1 和 2 没有支付 (payoff), 但在时期 3 会确定性地带来支付 100。经济中存在两种投资者: 噪声交易者 (noise traders) 与风险中性的套利者 (arbitrageurs)。在时期 3, 两类投资者都清楚无误的知道资产的支付为 100。在时期 1 和 2, 噪声交易者存在认知偏差, 会认为时期 3 的资产支付为  $V-S_t$  ( $t=1, 2$ )。在 1 和 2 时刻, 噪声交易者对资产的总需求为

$$N(t) = \frac{V - S_t}{p_t}$$

在时期 1, 噪声交易者的认知偏差为  $S_1=30$ 。套利者在时期 1 知道当期噪声交易者的认知偏差, 并在做时期 1 的投资决策时可以利用这一信息。但是, 套利者在时期 1 时并不清楚时期 2 噪声交易者的认知偏差  $S_2$  会是多少, 而只知道  $S_2$  有如下的概率分布

$$S_2 = \begin{cases} 50 & \text{(概率50\%)} \\ 0 & \text{(概率50\%)} \end{cases}$$

在时期 1, 套利者初始拥有的资金量为  $F_1=30$ 。它可以选择将其中的一部分、或是全部投入

到资产上。当然，套利者也可以完全不投资于资产。没有投资在资产上的资金将会被如数带到下一时期（这部分资金产生 1 的总回报率）。

在时期 2，基于套利资金在时期 1 的投资绩效，套利者所能掌管的资金量将会发生变化。具体来说，套利者时期 2 可用来投资的资金量为  $F_2 = F_1 \times [1 + 2 \times (R - 1)]$ 。其中的  $R$  为时期 1 投资的总回报率。

(a) 请列出套利者在 1 期的优化目标函数；

(b) 请计算，套利者在时期 1 应该将多少资金投在资产上，结果保留至小数点后一位（注意讨论角点解情况）；

(c) 请计算出时期 1 和时期 2 的资产价格，结果保留至小数点后一位。